Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Onsdagen den 23 april 2014 klockan 08.30-11.30 i V.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 070-3744377, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska uttryckas i de storheter som är givna i uppgiftstexten och i tillhörande figur (samt tyngdaccelerationen g om denna behövs) och, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

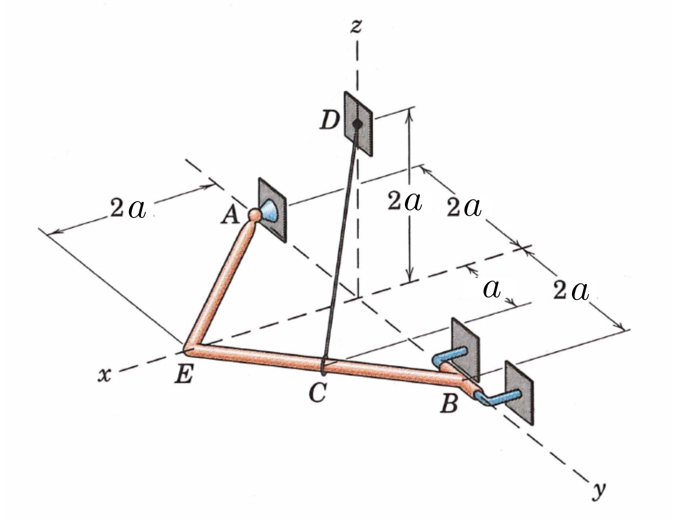
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

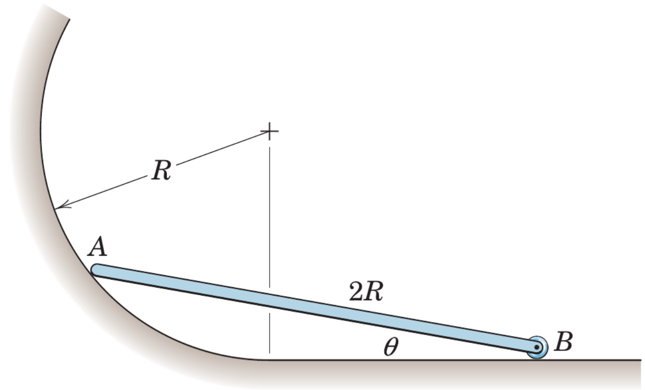
Rättningsgranskning: Torsdag 8/5 2014 kl.12-13 i sal FL61.

Uppgifter

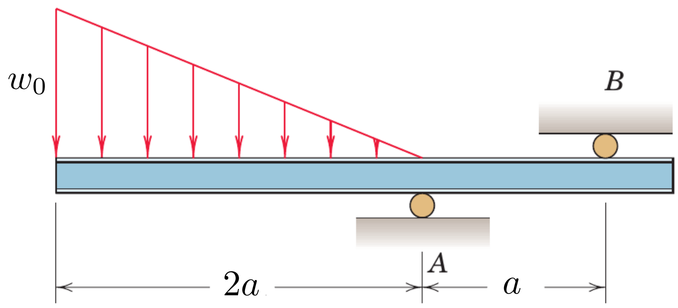
1. Beräkna kraften i linan CD samt reaktionskraften från väggen på kulleden i A vid jämvikt. Den V-formade staven är homogen och de två delarna har massan m vardera. Fästet vid B är fritt vridbart kring y-axeln, och kan även glida längs y-axeln, och det finns inget resulterande moment kring x- och z-axlarna i B.



2. Bestäm det maximala värdet av vinkeln θ för vilken den homogena stången förblir i jämvikt. Den statiska friktionskoefficienten vid A är μ_A och friktionen hos rull-stödet vid B kan försummas. Den vänstra delen av figuren är en cirkelbåge med radien R. Ledning: Ett mellansteg i räkningen är (antagligen) en andragradsekvation i $\sin\theta$.



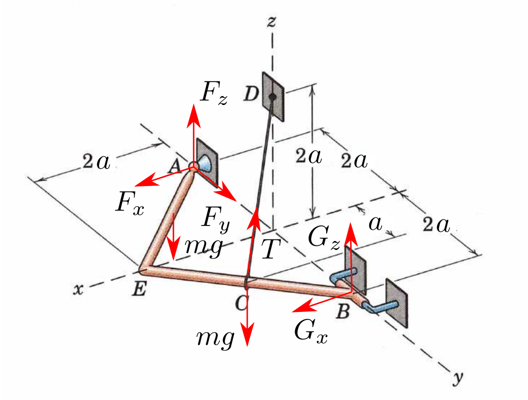
3. Rita skjuv- och momentdiagram för balken nedan och specificera skjuvkraften V och momentet M vid en punkt sträckan a till vänster om punkten A (dvs i mitten av kraftfördelningen). Balkens massa kan försummas.



Lycka till!

Lösningsförslag till omtenta FFM516
23/4-2014

Uppgift 1



Figur 1.

Ortsvektorer till de angivna punkterna ges av

$$\begin{aligned} A &= a(0,-2,0) \\ B &= a(0,2,0) \\ C &= a(1,1,0) \\ D &= a(0,0,2) \\ E &= a(2,0,0) \end{aligned}$$

Kraftvektorn $\boldsymbol{T}$ kan nu räknas ut.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= T\hat{\boldsymbol{T}} \\ &= T\frac{\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}|} \\ &= T\frac{a(-1,-1,2)}{\sqrt{6}a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}T(-1,-1,2) \end{aligned}$$

Denna kraft utövar ett moment kring origo som ges av

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{T} &= T\frac{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}}{|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}Ta\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}Ta(2,-2,0) \end{aligned}$$

Momentjämvikt kring y-axeln vid origo ger

$$\begin{aligned} 2mga + (\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{T})_y &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ 2mga - \frac{2}{\sqrt{6}}Ta &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ T &= \sqrt{6}mg \end{aligned}$$

På vektorform har vi $\boldsymbol{T} = mg(-1, -1, 2)$.

De enda krafterna i y-led är F_y och T_y så att jämvikt ger

$$\begin{aligned} F_y + T_y &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ F_y &= -T_y \\ &= mg \end{aligned}$$

Momentjämvikt kring z-axeln vid B ger

$$\begin{aligned} 4aF_x + aT_x + aT_y &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ F_x &= \frac{1}{4}(-T_y - T_x) \\ &= \frac{1}{2}mg \end{aligned}$$

Momentjämvikt kring x-axeln vid B ger

$$\begin{aligned} amg + 3amg - 4aF_z - aT_z &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ F_z &= mg - \frac{1}{4}T_z \\ &= \frac{1}{2}mg \end{aligned}$$

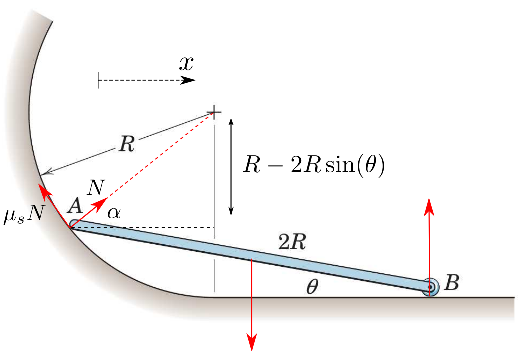
Tillsammans har vi då för $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)mg$$

$$|F| = \sqrt{\frac{6}{4}}mg = \frac{\sqrt{6}}{2}mg$$

$[F] = kg \cdot \frac{m}{s^2} = \text{kraft}$

Uppgift 2



Figur 2.

Först relateras den införda vinkeln α till θ:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{R - 2R\sin(\theta)}{R} \\
&= 1 - 2\sin(\theta) \\
\cos(\alpha) &= \sqrt{1 - (1 - 2\sin(\theta))^2} \\
&= \sqrt{4\sin(\theta) - 4\sin^2(\theta)}
\end{aligned}$$

Då friktionskraften är maximal precis innan stången börjar glida gäller att friktionskraftens storlek är $\mu_s N$ (som i figuren).

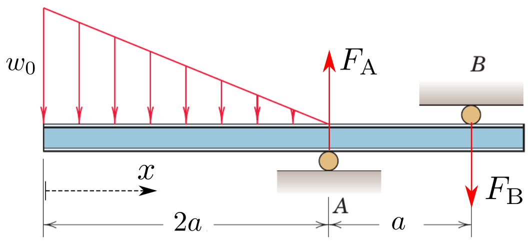
Kraftjämvikt i x-led ger direkt:

$$\begin{aligned}
N\cos(\alpha) - \mu_s N\sin(\alpha) &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\cos(\alpha) &= \mu_s \sin(\alpha) \\
&\Leftrightarrow \\
\sqrt{4\sin(\theta) - 4\sin^2(\theta)} &= \mu_s(1 - 2\sin(\theta)) \\
&\Rightarrow \\
4(\sin(\theta) - \sin^2(\theta)) &= \mu_s^2(1 - 4\sin(\theta) + 4\sin^2(\theta)) \\
&\Leftrightarrow \\
\sin^2(\theta)(4\mu_s + 4) + \sin(\theta)(-4\mu_s^2 - 4) + \mu_s^2 &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\sin^2(\theta) - \sin(\theta) + \frac{\mu_s^2}{4\mu_s^2 + 4} &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\left(\sin(\theta) - \frac{1}{2}\right)^2 &= -\frac{1}{4}\frac{\mu_s^2}{\mu_s^2 + 1} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{\mu_s^2 + 1} \\
&\Rightarrow \\
\sin(\theta) &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu_s^2 + 1}}
\end{aligned}$$

Eftersom $\mu_s^2 + 1 > 1$ så vi har en möjlig lösning

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu_s^2 + 1}}$$

Uppgift 3



Figur 3.

Den distribuerade kraften kan i friläggningsdiagrammet för hela balken ersättas av den ekvivalenta kraften $F = \frac{1}{2}w_0 \cdot 2a = w_0 a$ verkandes vid $x = \frac{2}{3}a$.

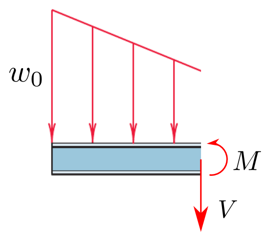
Momentjämvikt kring B ger

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{4}{3}a\right)w_0a - aF_A &= 0\\ &\Leftrightarrow\\ F_A &= \frac{7}{3}aw_0\end{aligned}$$

Momentjämvikt kring A ger

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}aw_0a - aF_B &= 0\\ &\Leftrightarrow\\ F_B &= \frac{4}{3}aw_0\end{aligned}$$

Friläggning av en bit till vänster om A ger för kraftjämvikt

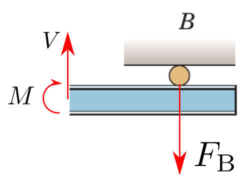


$$\begin{aligned}\int_0^x -\left(1-\frac{s}{2a}\right)w_0\mathrm{d}s - V(x) &= 0\\ &\Leftrightarrow\\ V(x) &= \left(-x+\frac{x^2}{4a}\right)w_0\end{aligned}$$

Från $M'(x) = V(x)$ får vi

$$\begin{aligned}M(x) &= \int_0^x V(s)\mathrm{d}s\\ &= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12a}\right)w_0\end{aligned}$$

Friläggning av en bit till höger om A ger direkt att



$$\begin{aligned}V(x) &= F_B = \frac{4}{3}aw_0\\ &\Rightarrow\\ M(x) &= M(2a) + \int_{2a}^x F_B\mathrm{d}s\\ &= \left(-2a^2+\frac{2}{3}a^2\right)w_0 + F_B(x-2a)\\ &= -\frac{4}{3}a^2w_0 + \frac{4}{3}aw_0(x-2a)\\ &= -\frac{12}{3}a^2w_0 + \frac{4}{3}aw_0x\end{aligned}$$

Sammanfattningvis har vi

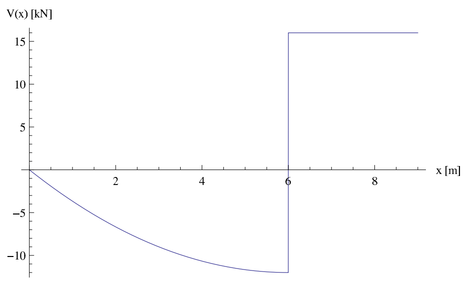
$$V(x) = \begin{cases} \left(-x + \frac{x^2}{4a}\right)w_0 & x < 2a \\ \frac{4}{3}aw_0 & x > 2a \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12a}\right)w_0 & x < 2a \\ \left(-\frac{12}{3}a^2 + \frac{4}{3}ax\right)w_0 & x \geqslant 2a \end{cases}$$

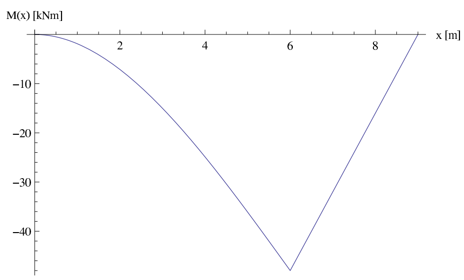
Eftersom $[w_0] = \frac{\text{kraft}}{m}$ ser man att $[V(x)] = \frac{kgm}{s^2}$ och $[M(x)] = \frac{kgm^2}{s^2}$.

Vid punkten $x = a$ ges de av

$$V(a) = -\frac{3}{4}aw_0$$
$$M(a) = -\frac{5}{12}a^2w_0$$



Figur 4. $V(x)\ \left\{a = 3\text{m}, w_0 = 4\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right\}$



Figur 5. $M(x)\ \left\{a = 3\text{m}, w_0 = 4\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right\}$